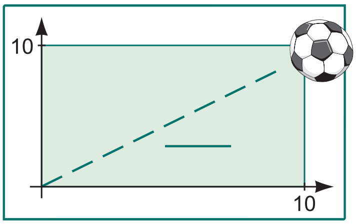
Igrzyska na ekranie

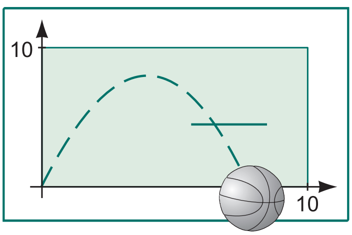
Podczas igrzysk niejeden Czytelnik MMM zasiądzie przed telewizorem, aby z zaciśniętymi kciukami śledzić zmagania naszych sportowców. W przerwach proponujemy rozegranie kilku konkurencji na ekranie dowolnego kalkulatora graficznego. Podstawowym problemem jest odkrycie roli, jaką w równaniach funkcji odgrywają parametry. Aby sobie z tym poradzić wystarcza na ogół przeprowadzenie kilku eksperymentów z wykresami. Czasem ciekawsze od rozwiązywania może okazać się układanie podobnych zadań.

Konkurencje dla juniorów



Piłka nożna

Na obu osiach ustawiamy zakres $\langle 0,\ 10\rangle$. Z narożnika boiska – punkt (0, 0) – piłką chcemy trafić do bramki strzelając wzdłuż linii prostej $Y_2 = aX$, zmieniając współczynnik a. Bramka to wykres funkcji $Y_1 = \begin{cases} 3 \text{ dla } X \in (5,\ 8) \\ 0 \text{ dla } X \notin (5,\ 8) \end{cases}$. Na kalkulatorze wzór tej funkcji podajemy jako $Y_1 = 3\,(5 < X)(X < 8)$ w trybie pozwalającym rysować wykresy w sposób nieciągły. Jak wybrać a, by trafić? Po ilu strzałach się udało? Można zmieniać położenie i nachylenie bramki, np. przyjmując $Y_1 = \begin{cases} -X + 12 \text{ dla } X \in (3,\ 5) \\ 0 \text{ dla } X \notin (3,\ 5) \end{cases}$.



Koszykówka

Kosz wygląda tak samo jak bramka. Rzucamy piłką z punktu (0, 0), ale tym razem leci ona wzdłuż paraboli $Y_2 = -aX(X - b)$. Jak zmieniać wartości a i b, aby rzut był celny? Piłka powinna wpaść do kosza od góry i nie może dotknąć sufitu (tj. górnego zakresu y-ów). Teraz trudności są większe, bo lotem piłki sterują dwa parametry. Jeden odpowiada za zasięg lotu (który?). A który odpowiada za wysokość rzutu? Zabawę można powtórzyć dla innych położeń kosza.

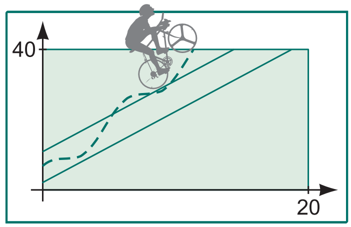
Zadania dla Czytelników

1. Jak ustawić bramkę, aby najłatwiej było do niej trafić?
2. W sali gimnastycznej o wysokości 10 jako odcinek AB, $A(7,\ 7)$, $B(8,\ 7)$, umieszczony jest kosz. Podaj takie a, aby piłka rzucana z punktu (0, 0) i lecąca po paraboli $y = ax^2 + bx$ wpadła do kosza nie dotykając sufitu, jeśli:
   i) $b = 3$, ii) $b = 4$, iii) $b = 5$.
3. Znaleźć wszystkie parabole „trafiające” do ustalonego kosza.
4. Jak zagrać w ringo na ekranie „kartezjańskim”?
5. A w kosza na ekranie „parametrycznym”?

Na odpowiedzi czekamy do końca września.

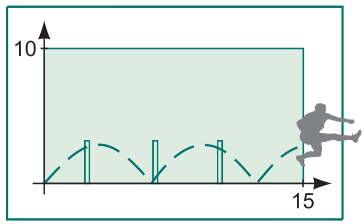
Konkurencje dla seniorów

Slalom rowerowy



Trasę zjazdu wyznaczają proste: $Y_1 = 2X+1$, $Y_2 = 2X+10$, a przejazd odbywa się wzdłuż krzywej $Y_3 = aX + b\cos X + c$. Zmieniając parametry należy tak poprowadzić linię przejazdu, aby nie wypaść z wyznaczonej trasy. Można zmieniać trasę (np. $Y_1 = 0.5X+2$, $Y_2 = 0.5X+5$) i technikę jazdy (np. $Y_3 = aX + \sin bX + c$).

Bieg przez płotki



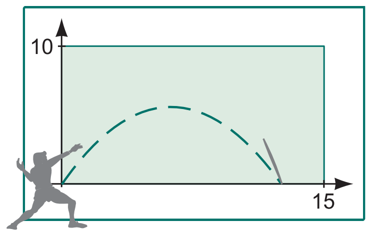
Płotki otrzymujemy podobnie jak bramkę i kosz, sumując kilka takich wyrażeń. Ponieważ są różne od zera na rozłącznych przedziałach, możemy użyć do tego jednej funkcji

$$Y_1 = 2(1<X)(X<2) + 2(5<X)(X<6) + 2(9<X)(X<10).$$

Przez płotki skaczemy po wykresie funkcji $Y_2 = \left|a\sin\frac{X}{b}\right|$, co wpisujemy do kalkulatora jako abs(a*sin(X/b) (abs to skrót angielskiego terminu *absolute value* oznaczającego wartość bezwzględną). Aby konkurencję utrudnić, można zróżnicować wysokość płotków i/lub odstępy między nimi. Jak?

Konkurencje dla oldboyów

Rzut oszczepem



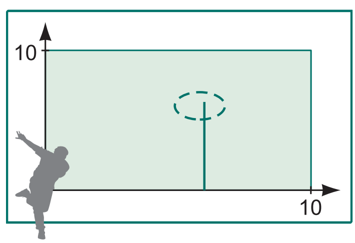
Lotem oszczepu sterujemy zmieniając kąt (w stopniach), pod jakim oszczep jest wyrzucany. Parametr ten wpisujemy jako wartość funkcji Y_1. Na początek ustawiamy np. $Y_1 = 65$. Oszczep leci wzdłuż linii: $Y_2 = X\tan Y_1 - 9.81\,(X/(12\cos Y_1))^2/2$, co jest równaniem ruchu w rzucie ukośnym, jeśli bowiem wyrzucimy oszczep pod kątem α do poziomu nadając mu prędkość v (v_x i v_y to jej składowe pozioma i pionowa), to $y(t) = v_y t - \frac{gt^2}{2}$, gdzie $v_y = v\sin\alpha$, a $t = \frac{x}{v_x} = \frac{x}{v\cos\alpha}$, zatem

$$y(x) = v\sin\alpha \cdot \frac{x}{v\cos\alpha} - \frac{g\cdot\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2}{2} = x\tan\alpha - \frac{g\cdot\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2}{2},$$

co zgadza się z naszym równaniem dla $v = 12$. Wykresem tej funkcji jest parabola. Oczywiście naszym celem jest uzyskanie jak najdłuższego rzutu. Jak dobrać wartość kąta, pod którym należy wyrzucić oszczep?

Ringo

W ringo zagramy używając funkcji w trybie parametrycznym. Zakres ekranu to $\langle 0, 10\rangle$ na obu osiach układu współrzędnych, a zakres parametru T zadajemy jako $\langle 0, 2\pi\rangle$. Słupek, na który będziemy zarzucali ringo, wpisujemy np. jako funkcję $\begin{cases} X_{1T} = 6 \\ Y_{1T} = T. \end{cases}$ Obręcz ringo to wykres okręgu $\begin{cases} X_{1T} = 2(\cos T + a) \\ Y_{1T} = 2(\sin T + b). \end{cases}$



Gra polega na takim zmienianiu położenia obręczy (przez zmianę parametrów w równaniu okręgu), aby zarzucić ją na słupek.

Małgorzata Mikołajczyk, Krzysztof Omiljanowski