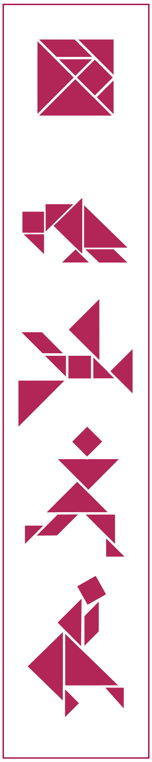
Geometria nożyczek



Każdy z pewnością bawił się kiedyś starochińskim tangramem. Zadania tangramowe, polegające na rozcinaniu danej figury i układaniu z otrzymanych części innej figury, do dziś są bardzo popularne. Okazuje się, że technika tangramów może być stosowana również w matematyce.

Tangramy

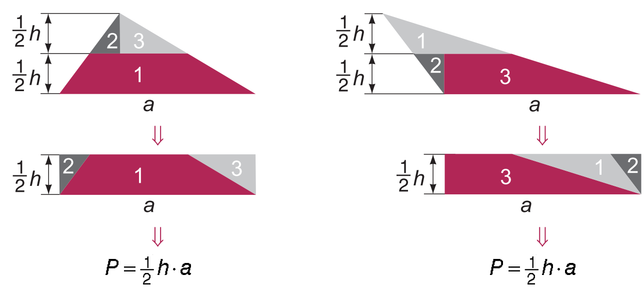
Chiński tangram (nazwę tę wprowadził amerykański miłośnik i twórca łamigłówek, Sam Loyd) to kwadratowa mozaika złożona z siedmiu części – tanów, z których należy ułożyć zadane figury. Chińska nazwa tej łamigłówki oznacza „siedmiokrotną mądrość”, a po polsku była ona nazywana „łamigłówką siedmiu sztuczek”. Pierwsze opublikowane informacje o tangramach pochodzą z początku XIX w., ale sama łamigłówka jest z pewnością o wiele starsza. Do dziś w różnych wydawnictwach ukazało się ok. 2000 wzorów figur do ułożenia z siedmiu tanów.

Zasady układania tangramu są następujące: układana figura musi składać się ze wszystkich części figury wyjściowej, które można kłaść na dowolną stronę, ale elementy nie mogą na siebie zachodzić.

Podobne zasady wykorzystuje się w wielu łamigłówkach geometrycznych, a także w dowodach twierdzeń matematycznych.

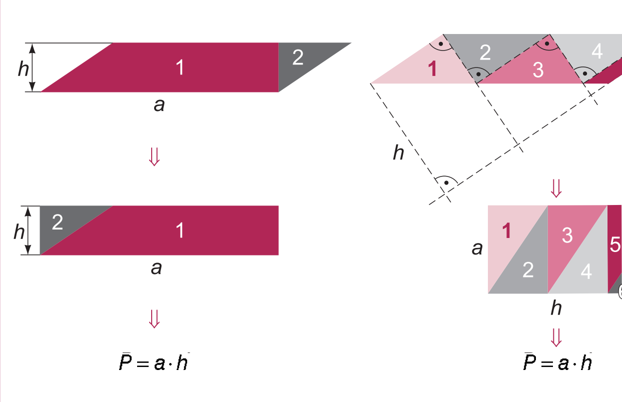
Nożyczkowe wzory

Przyjmijmy, że znamy wzór na pole prostokąta o bokach a i b^*. Stosując tylko metodę rozcinania figur i układania nowych z otrzymanych części można łatwo uzasadnić inne znane wzory na pola wielokątów. Na podstawie rys. 1 i 2 można wyprowadzić wzór na pole trójkąta oraz równoległoboku (dla dowolnej podstawy i opuszczonej na nią wysokości), rys. 3 i 4 pokazują, jak uzasadnić wzory na pola trapezu i deltoidu, natomiast rys. 5 pozwala wyprowadzić wzór na pole dowolnego czworokąta.

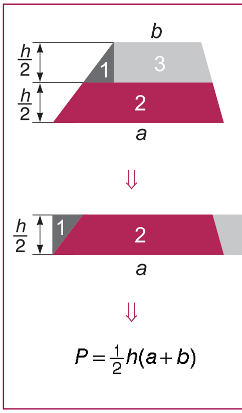


Rys. 1

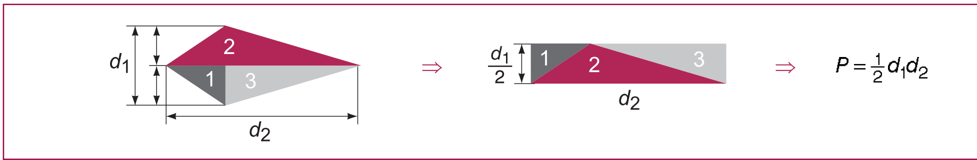
* Tego wzoru nie można wyprowadzić w sposób elementarny, nie stosując przejścia granicznego.



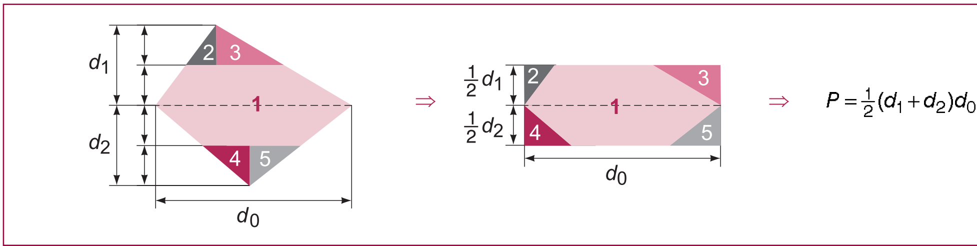
Rys. 2



Rys. 3

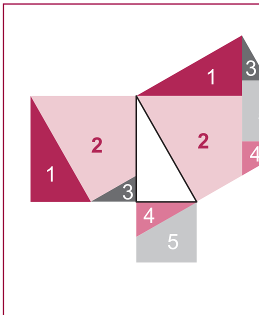


Rys. 4

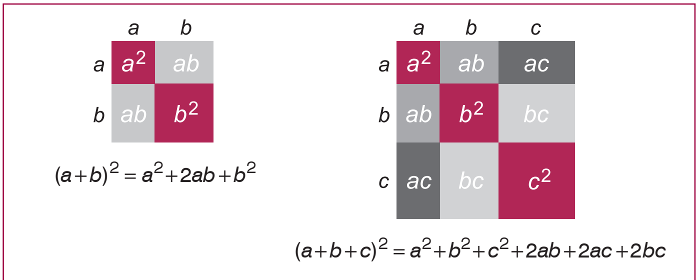


Rys. 5

Metodą tangramu można też udowodnić twierdzenie Pitagorasa (rys. 6) oraz uzasadnić różne tożsamości algebraiczne dla liczb dodatnich (np. rys. 7).



Rys. 6



Rys. 7

Równoważność przez rozcinanie

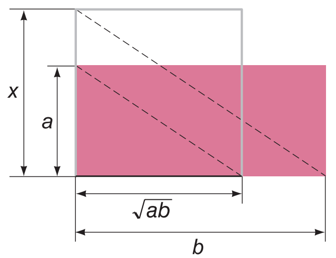
O dwóch figurach mówimy, że są równoważne przez rozcinanie, jeśli jedną z nich można pociąć na skończenie wiele części, z których można ułożyć (na zasadach tangramu) drugą figurę. Oczywiście figury równoważne przez rozcinanie mają jednakowe pola.

Ćwiczenia

1. Czy kwadrat może być równoważny przez rozcinanie kwadratowi o boku dłuższym o 1? Czy prostokąt może być równoważny prostokątowi o jednym boku dłuższym o 1? A kwadratowi o boku dłuższym o 1 od jednego z boków wyjściowego prostokąta? Jakie wymiary powinny mieć te figury?

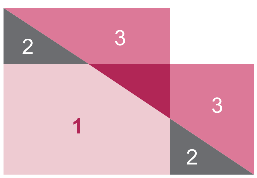
2. Czy figura krzywoliniowa może być równoważna przez rozcinanie kwadratowi?

W poprzednim numerze (w artykule *Mierzenie pól cyrklem i linijką*) pisaliśmy o innym typie równoważności figur – figurach polowo równoważnych. Oczywiście figury równoważne przez rozcinanie są polowo równoważne. W dalszej części artykułu pokażemy, że dla wielokątów jest również na odwrót – mając dwa wielokąty o jednakowych polach można zawsze tak rozciąć jeden z nich, aby z otrzymanych części złożyć drugi.

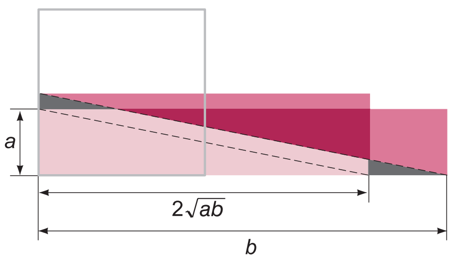


$$\frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Z prostokąta kwadrat

Na początek wykażemy, że dowolny prostokąt jest równoważny przez rozcinanie kwadratowi. Dla niektórych prostokątów jest to zadanie łatwe. Odpowiednią konstrukcję przedstawia rys. 8. Na dłuższym boku prostokąta o bokach a i b odkładamy odcinek o długości $\sqrt{ab}$, czyli bok szukanego kwadratu. Otrzymany w ten sposób punkt łączymy z lewym górnym wierzchołkiem prostokąta, a przez jego prawy dolny wierzchołek prowadzimy prostą równoległą do poprzedniej aż do przecięcia z przedłużeniem lewego boku prostokąta. Z twierdzenia Talesa otrzymamy na tym przedłużeniu odcinek o długości boku szukanego kwadratu. Stąd otrzymujemy właściwe rozcięcie prostokąta – rys. 9 (wykazanie przystawania odpowiednich trójkątów pozostawiamy Czytelnikom).

Ta konstrukcja nie zawsze jest jednak wykonalna. Można ją zrealizować tylko wtedy, gdy bok kwadratu jest nie dłuższy od połowy dłuższego boku prostokąta (dlaczego?). Dla prostokątów niespełniających tego warunku (tzn. „długich" i „chudych") możemy rozcinanie wykonać w kilku krokach. Najpierw sprowadzamy prostokąt do równoważnego, ale „krótszego" i „grubszego". Tę operację możemy powtarzać, w zależności od tego, ile razy bok kwadratu daje się odłożyć na dłuższym boku prostokąta. Gdy ten nowy prostokąt stanie się odpowiednio krótki, rozcinamy go, aby uzyskać kwadrat. Rys. 10 przedstawia tę operację, gdy bok kwadratu daje się odłożyć dwukrotnie na dłuższym boku prostokąta. Nałożenie cięć z poszczególnych etapów na wyjściową figurę pozwala rozciąć ją na skończenie wiele części, z których można ułożyć kwadrat.

Z wielokąta kwadrat

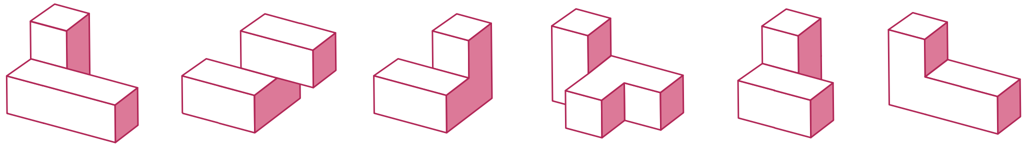
Z dotychczasowych rozważań widzimy, że dowolny trójkąt oraz dowolny czworokąt są równoważne przez rozcinanie kwadratowi (z każdego z nich można uzyskać prostokąt, a z prostokąta kwadrat, ostatecznie nakładamy wszystkie rozcięcia na wyjściową figurę). Dowolny wielokąt jest równoważny przez rozcinanie skończonej liczbie kwadratów, można go bowiem podzielić na trójkąty, a następnie rozciąć je i z każdego z nich złożyć kwadrat. Czy możliwe jest jednak, aby z części rozciętego wielokąta złożyć jeden kwadrat? Okazuje się, że tak. Wiemy już (patrz rys. 6), że figura będąca sumą dwóch kwadratów jest równoważna przez rozcinanie jednemu kwadratowi. Wykonując dodatkowe rozcięcia kwadratów uzyskanych z wyjściowego wielokąta, możemy ostatecznie złożyć z nich jeden kwadrat. Zatem dowolny wielokąt jest równoważny przez rozcinanie kwadratowi.

Twierdzenie Bolyai-Herwina

Każde dwa wielokąty o równych polach są równoważne przez rozcinanie. Twierdzenie to udowodniło niezależnie dwóch matematyków: Węgier Farkas Bolyai (ojciec słynnego Jánosa – odkrywcy geometrii nieeuklidesowych) w 1832 r. i Niemiec Paul Herwin w 1833 r. Dowód jest prosty. Najpierw oba wielokąty rozcinamy tak, aby z części każdego z nich złożyć kwadrat (oczywiście będzie to taki sam kwadrat), a następnie nakładamy te rozcięcia kwadratu jedno na drugie. Z tak otrzymanych części możemy teraz złożyć zarówno jeden, jak i drugi wielokąt. Dzięki temu twierdzeniu pola wszystkich wielokątów (poza prostokątem) możemy obliczyć w sposób elementarny (nie używając przejścia granicznego).

Twierdzenie Dehna

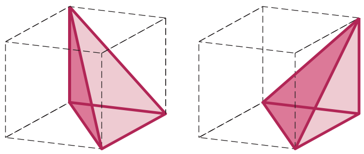
Pojęcie tangramu, a także równoważności figur przez rozcinanie możemy uogólnić na przestrzeń trójwymiarową. Jednym z najbardziej znanych przestrzennych tangramów jest łamigłówka Hugona Steinhausa (rys. 11).



Rys. 11. Z tych klocków należy złożyć sześcian

Dwie bryły są równoważne przez rozcinanie, jeśli jedną z nich można tak pociąć płaskimi cięciami, żeby z otrzymanych części złożyć drugą. Oczywiście bryły równoważne przez rozcinanie mają jednakowe objętości. Dla wielokątów było też na odwrót, a czy podobnie jest dla wielościanów? Takie pytanie postawił w swoim słynnym odczycie w 1900 r. matematyk niemiecki Dawid Hilbert. Był przekonany, że uda się na nie odpowiedzieć pozytywnie. Problem ten został rozstrzygnięty już w 1901 r. przez innego niemieckiego matematyka – Maxa Dehna.

Problemy Hilberta to lista najważniejszych zdaniem Hilberta pytań, jakie stały przed matematykami XX w. Ogłosił ją w 1900 r. podczas II Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Paryżu. Niektóre z pytań matematycy rozstrzygali od razu na sali obrad. Te, na które nie udało się odpowiedzieć (było ich 23), opublikowano i stały się one programem badawczym matematyków na XX w. Program ten został częściowo zrealizowany, ale 7 pytań pozostaje nadal bez odpowiedzi, wśród nich np. słynna hipoteza Riemanna o miejscach zerowych funkcji dzeta.



Rys. 12. Figura pierwsza jest równoważna przez rozcinanie sześcianowi, a druga nie

Niezmiennik Dehna dla danego wielościanu o n krawędziach to liczba:

$$d_f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) l_i,$$

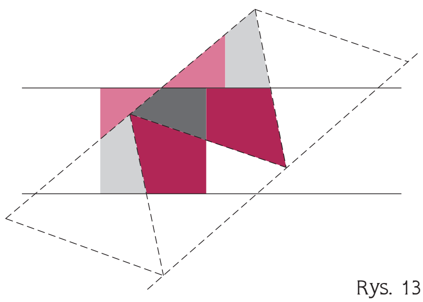
gdzie l_i to długość i-tej krawędzi, α_i jest rozwartością kąta dwuściennego przy tej krawędzi, a f jest dowolną funkcją ciągłą na $\langle 0, \pi \rangle$ spełniającą

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(\pi) = 0.$$

Dehn zauważył, że jeśli obliczy się sumę iloczynów długości wszystkich krawędzi wielościanu i wartości pewnej funkcji rozwartości kątów dwuściennych przy tych krawędziach, to otrzymana liczba (d_f) nie zmienia się przy podziale wielościanu na części i złożeniu z nich nowej bryły. Okazało się, że istnieją wielościany o jednakowej objętości, które dla pewnej funkcji f dają różne wartości d_f, a więc nie są równoważne przez rozcinanie. Takie są dwa najprostsze wielościany foremne – czworościan i sześcian. Także dwa niemal identyczne na pierwszy rzut oka czworościany z rys. 12 nie są równoważne.

W 1965 r. Jean Paul Sydler wykazał, że jeśli dwa wielościany mają równe objętości i równe niezmienniki Dehna dla wszystkich funkcji f (jest ich nieprzeliczalnie wiele), to są równoważne przez rozcinanie. W ten sposób rozstrzygnięto ostatecznie problem Hilberta.

Ponieważ nie jest prawdziwy przestrzenny odpowiednik twierdzenia Bolyai-Herwina, nie da się wyprowadzić elementarnie wzoru na objętość ostrosłupa (i objętości innych wielościanów). Trzeba do tego użyć przejścia granicznego.



Rys. 13

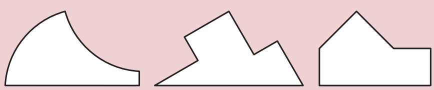
Konstrukcje

Sposób konstruowania rozcięcia wielokąta, aby złożyć z jego części inny wielokąt, opisany w dowodzie twierdzenie Bolyai-Herwina ma znaczenie czysto teoretyczne, często bowiem wielokąt rozpada się przy tym na bardzo dużo części. W praktyce znaczenie mają podziały, które dają stosunkowo niewielką liczbę części. Nie ma jednak ogólnego sposobu znajdowania takich rozcięć. Jedną z możliwych do zastosowania technik jest próba takiego pocięcia obu figur, aby z części udało się ułożyć powtarzalny element pasa. Takie pasy nakładamy potem pod odpowiednim kątem i nanosimy cięcia. Rys. 13 przedstawia tę operację dla kwadratu i trójkąta równobocznego.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Stolarz ma deskę o wymiarach 0,80 × 0,30 m, ale potrzebuje deskę o wymiarach 1,20 × 0,20 m. Jak powinien rozpiłować posiadaną deskę?

2. Każdą z tych figur podziel na dwie części, z których można złożyć kwadrat.



3. Rozetnij siatkę sześcianu i z jej części ułóż trójkąt równoboczny.

Rozwiązań szukajcie wewnątrz numeru.

LITERATURA

M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.

M. Mikołajczyk, *Pola figur płaskich*, OBRPNiSS, Warszawa 1990.

H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, WSiP, Warszawa 1989.

M. Szurek, *Opowieści matematyczne*, WSiP, Warszawa 1987.

A. Wierzbic, *Papierowe dinozaury. Tangramy*, Kleks, Bielsko-Biała 2000.

J. Zydler, *Geometria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.

Małgorzata Mikołajczyk