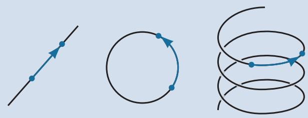
Etiudy geometryczne

Mierzenie pól cyrklem i linijką

Od czasów starożytnych konstrukcje geometryczne wykonuje się wyłącznie przy użyciu cyrkla i linijki bez podziałki. To ograniczenie narzędzi zawdzięczamy Platonowi, który uznał, że rozwiązanie problemu konstrukcyjnego powinno sprowadzać się do kreślenia figur doskonałych, a za takie uważał jedynie okrąg i prostą.

Jednym z często spotykanych problemów konstrukcyjnych jest zagadnienie **kwadratury** *danej figury, to znaczy skonstruowania kwadratu o polu równym polu tej figury. W artykule zajmiemy się kwadraturą dowolnych wielokątów płaskich. Ta operacja umożliwi rozwiązanie kilku oryginalnych zadań, mianowicie konstrukcyjnego porównywania i mierzenia pól wielokątów, a nawet objętości brył.*

Linie doskonałe to takie, które ślizgają się same po sobie. Na płaszczyźnie własność tę mają tylko okrąg i prosta, w przestrzeni dochodzi jeszcze linia śrubowa.



Każdy punkt figury można przesunąć na dowolny inny, zachowując przy tym całą figurę.

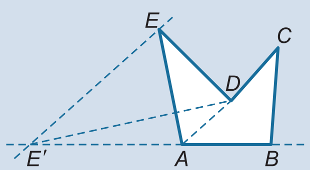
Z wielokąta – kwadrat

O innym typie równoważności figur – tzw. równoważności przez rozcinanie – napiszemy w następnym numerze.

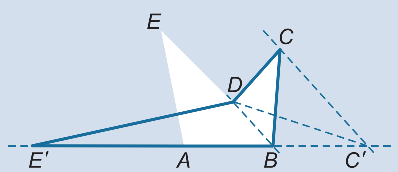
W matematyce figury o równych polach nazywa się **polowo równoważnymi**. W tym artykule będziemy je nazywali krócej – po prostu równoważnymi. Zagadnienie kwadratury danej figury sprowadza się więc do skonstruowania równoważnego jej kwadratu, a w zasadzie do skonstruowania boku tego kwadratu (wtedy dokończenie konstrukcji jest już łatwe). Kwadratury wielokąta dokonamy w trzech etapach:

I. Przekształcenie wielokąta w równoważny trójkąt.
II. Przekształcenie trójkąta w równoważny prostokąt.
III. Przekształcenie prostokąta w równoważny kwadrat.

Proces ten zilustrujemy na przykładzie wklęsłego pięciokąta $ABCDE$.



Rys. 1



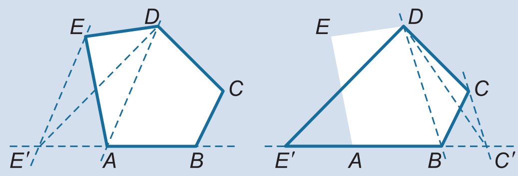
Rys. 2

Etap I

Wybierzmy dowolny bok wielokąta, np. AB jako podstawę przyszłego trójkąta. Przedłużamy bok AB w obie strony. Przez wierzchołek E prowadzimy prostą równoległą do przekątnej AD i w przecięciu z prostą zawierająca podstawę AB otrzymujemy punkt E'. Zauważmy, że trójkąty $AE'D$ i AED są równoważne, ponieważ mają wspólny bok AD i równe wysokości opuszczone z przeciwległego wierzchołka. Zatem pięciokąt $ABCDE$ i czworokąt $BCDE'$ są równoważne.

Czynności te powtarzamy dla przekątnej DB, zastępując trójkąt BCD równoważnym mu trójkątem $BC'D$.

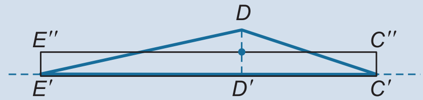
Otrzymany w wyniku tych operacji trójkąt $C'DE'$ jest równoważny wyjściowemu pięciokątowi $ABCDE$. Pierwszy etap kwadratury został zakończony. Analogiczną konstrukcję można wykonać w przypadku pięciokąta wypukłego (rys. 3), a także innych wielokątów (zmienia się tylko liczba powtórzeń opisanych tu operacji).



Rys. 3

Etap II

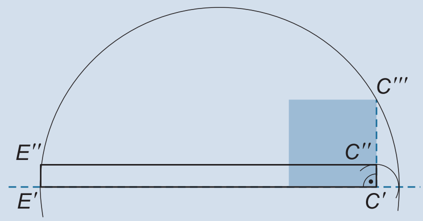
Konstrukcja prostokąta równoważnego trójkątowi jest bardzo prosta. Wystarczy za jeden z boków przyjąć połowę dowolnej wysokości trójkąta, a za drugi – bok, na który ta wysokość jest opuszczona. Rys. 4 ilustruje tę operację w przypadku trójkąta $E'C'D$. Podziału wysokości dokonujemy oczywiście konstrukcyjnie – cyrklem i linijką (konstrukcja symetralnej odcinka). Zatem prostokąt $E'C'C''E''$ jest równoważny trójkątowi $E'C'D$, a tym samym pięciokątowi $ABCDE$.



Rys. 4

Etap III

Przekształcenie prostokąta w równoważny mu kwadrat też nie jest trudne. Dla prostokąta o bokach długości a i b wystarczy konstrukcyjnie wyznaczyć odcinek o długości będącej średnią geometryczną tych liczb, tzn. $\sqrt{ab}$ (patrz np. poprzedni MMM, s. 11). Rys. 5 ilustruje taką konstrukcję w przypadku prostokąta $E'C'C''E''$. Odcinek $C'C'''$ stanowi bok szukanego kwadratu (równoważnego prostokątowi $E'C'C''E''$ i zarazem wyjściowemu pięciokątowi).



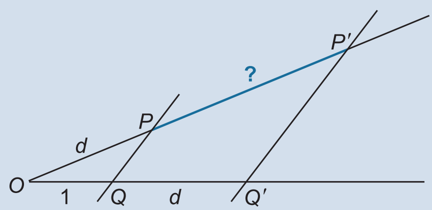
Rys. 5

Porównywanie pól wielokątów

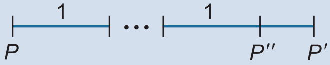
Aby porównywać pola różnych wielokątów za pomocą cyrkla i linijki, wystarczy teraz dokonać kwadratury każdego wielokąta. Po skonstruowaniu boków obu kwadratów wystarczy cyrklem porównać ich długości.

Pomiar pola wielokąta

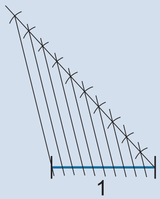
Pole dowolnego wielokąta można zmierzyć za pomocą cyrkla i linijki z dowolną dokładnością, jeśli tylko dany jest odcinek jednostkowy. Aby tego dokonać, zaczynamy od kwadratury wielokąta prowadzącej do skonstruowania odcinka o długości równej długości boku kwadratu równoważnego wyjściowemu wielokątowi. Powiedzmy, że długość ta wynosi d (zatem pole kwadratu to d^2). Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy skonstruować odcinek o długości d^2. Konstrukcję tę przedstawia rys. 6, gdzie poszukiwany odcinek to PP'. Opis konstrukcji pozostawiamy Czytelnikowi.



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Teraz możemy przystąpić do konstrukcyjnego pomiaru pola.

a) Na odcinku PP' odkładamy odcinek jednostkowy (tak długo, jak się da). Tę całkowitą liczbę odłożeń oznaczamy przez n. Jeśli coś jeszcze z odcinka PP' pozostanie (nazwijmy ten odcinek $P''P'$), to długość tego odcinka jest mniejsza niż 1.

b) Dzielimy odcinek jednostkowy (korzystając z twierdzenia Talesa) na dziesięć równych części (rys. 8). Skonstruujemy w ten sposób odcinek o długości 0,1 jednostki. Ten odcinek odkładamy jak najwięcej (n_1) razy na odcinku $P''P'$. Wiemy, że $n_1 \in \{1, 2, ..., 9\}$. Jeśli coś nadal z odcinka $P''P'$ pozostanie (ozn. $P'''P'$), to jest to mniej niż 0,1.

c) Czynności z punktu b) powtarzamy odkładając na odcinku $P'''P'$ odcinek o długości 0,01 jak najwięcej (n_2) razy itd. Procedurę kontynuujemy tak długo, aż uzyskamy wymaganą dokładność pomiaru pola.

Ostatecznie mierzone pole wielokąta będzie równe $n,n_1n_2...$, gdzie n_i to kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego. Widzimy więc, że za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki można geometrycznie wyznaczyć z dowolną dokładnością pole każdego wielokąta płaskiego.

Pomiar objętości

Przedstawioną metodę można też zastosować do porównywania i pomiaru objętości niektórych brył, np. graniastosłupów i ostrosłupów. Zagadnienie to pozostawiamy do przemyślenia Czytelnikom.

Piotr Olszowiec

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Zadania należy rozwiązać konstrukcyjnie, posługując się cyrklem i linijką bez podziałki. Zakładamy, że dany jest odcinek jednostkowy.

1. Opisz kwadraturę figury złożonej z pięciu różnych kwadratów.

2. Wyznaczyć jako długość odcinka różnicę pól dwóch kwadratów z poprzedniego zadania.

3. Skonstruuj odcinek wyznaczający stosunek pól kwadratów z zad. 2.

4. Pierwszą kwadraturą figury krzywoliniowej była kwadratura księżyców Hipokratesa* trójkąta prostokątnego przeprowadzona przez pitagorejczyków ok. IV w. p.n.e. Opisz tę konstrukcję.

5. Mając dane odcinki o długościach a, b, c, d, e, skonstruuj odcinek o długości x, gdzie:

a) $x = a\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}$

c) $x = \frac{abc}{de}$

d) $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$

* Chodzi o Hipokratesa z Chios, znanego ucznia Pitagorasa. Nie mylić z Hipokratesem z Kos, patronem lekarzy.

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

Księżyce Hipokratesa wielokąta wpisanego w okrąg to figury, których brzegi są łukami tego okręgu i półokręgów o średnicach będących bokami wielokąta, leżących na zewnątrz tego wielokąta.