

Samouczek zadaniowy

Falszywe monety

W zadaniach łamigłówek często pojawia się problem wyznaczenia fałszywej spośród zestawu jednakowych z wyglądu monet. Moneta fałszywa zawsze różni się tylko wagą, a monety prawdziwe ważą tyle samo. Zadanie należy rozwiązać przy użyciu wagi szalkowej bez odważników i minimalnej liczby ważeń. Poniżej znajdziecie kilka rozwiązanych zadań tego typu oraz dalsze przykłady do samodzielnego rozwiązania.

Pierwszy typ zadań to zestawy z jedną fałszywą monetą, o której wiemy, czy jest lżejsza, czy cięższa niż każda z pozostałych.

Zadanie 1

Na stole leżą trzy monety. Wiadomo, że jedna z nich jest fałszywa i cięższa od pozostałych. Ile ważeń trzeba wykonać, aby znaleźć tę monetę?

Rozwiązanie

Wystarczy jedno ważenie. Jedną monetę pozostawiamy na stole, a pozostałe kładziemy na obu szalkach wagi. Jeśli waga przechyli się, to w stronę fałszywej monety. Jeśli pozostanie w równowadze, to fałszywa moneta leży na stole.

Zadanie 2

Wśród dziewięciu monet jedna jest fałszywa i cięższa od pozostałych. Ile ważeń należy wykonać, aby ją wskazać?

Rozwiązanie

Jedno ważenie nie wystarczy, bo rozkładając monety w dowolny sposób, fałszywa zawsze może znaleźć się w grupie zawierającej co najmniej trzy monety i nie będziemy mogli jej wskazać.

Dwa ważenia wystarczą. W pierwszym na szalkach kładziemy po trzy monety (i trzy zostają na stole). Dzięki temu wiemy, w której trójce jest moneta fałszywa. Do jej wykrycia wystarczy jedno ważenie (zad. 1).

Zadanie 3

Na stole leżą 162, wśród nich fałszywa, cięższa od pozostałych. W ilu ważeniach potrafisz ją wskazać?

Odpowiedź

Wystarczy 5 ważeń (wskazówka – kładziemy na szalki po 54 monety, potem po 18 z grupy, w której jest fałszywa, a potem po 9; dalej jak w zadaniu 2).

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

- 1) Ile ważeń potrzeba i jak je przeprowadzić, aby wskazać fałszywą monetę wśród:
a) 10, b) 27, c) 30?
- 2) Kasia ma w pudełku jednakowe monety. Okazało się, że jedna z nich jest cięższa od pozostałych. Kasia umie ją znaleźć za pomocą trzech ważeń. Ile ma monet?
- 3) Uogólnij powyższe zadania.



Drugi typ zadań to zestawy z jedną fałszywą monetą, o której nie wiemy, czy jest lżejsza, czy cięższa. Chcemy nie tylko wskazać tę monetę, ale stwierdzić, jak różni się od pozostałych.

Zadanie 4

Wśród pięciu monet jest jedna fałszywa, i różni się wagą od pozostałych. Ile ważeń wystarczy, by ją znaleźć i stwierdzić, czy jest lżejsza, czy cięższa?

Rozwiązanie

Na szalkach kładziemy po dwie monety. Jeśli waga pozostanie w równowadze, fałszywa moneta leży na stole i drugie ważenie pozwoli stwierdzić, czy jest lżejsza, czy cięższa.

Jeśli waga się przechyli, to moneta pozostała na stole jest dobra. Podmieńmy ją z jedną z monet na „cięższej” szalce. Co może się wtedy stać? Czy wychylenie wagi może zmienić się na przeciwne? Dlaczego nie? Po zamianie albo waga wróci do położenia równowagi (to znaczy, że odłożona moneta była fałszywa i cięższa), albo nic się nie zmieni. To z kolei oznacza, że albo druga moneta na „cięższej” szalce była fałszywa i cięższa, albo fałszywa moneta jest lżejsza i leży na szalce przeciwnej. Aby to stwierdzić trzeba, wykonać trzecie ważenie, porównując np. dwie monety z szalki „lżejszej”. Zatem w najgorszym wypadku wystarczą trzy ważenia.

Zadanie 5

Wśród a) 9, b) 12 monet jest jedna fałszywa, która różni się wagą od pozostałych. Ile ważeń wystarczy, aby wykryć tę monetę i stwierdzić, czy jest lżejsza, czy cięższa?

Odpowiedź

a) 3 (dzielimy monety na 3 grupy po 3), b) 3 (dzielimy monety na 4 grupy po 4).

Trzeci typ zadań to zestawy z jedną monetą fałszywą, o której nie wiemy, czy jest lżejsza, czy cięższa i albo chcemy tylko wskazać tę monetę, albo tylko dowiedzieć się, jak różni się od pozostałych.

Zadanie 6

Wśród 15 monet jedna jest fałszywa i różni się wagą od pozostałych. Czy dwa ważenia wystarczą, by stwierdzić, czy fałszywa moneta jest lżejsza, czy cięższa?

Odpowiedź

Tak. Dzielimy monety na trzy grupy po 5.

Zadanie 7

Wśród czterech monet jest jedna fałszywa. Ile ważeń wystarczy, aby ją wskazać, jeśli:
a) chcemy wiedzieć, czy jest lżejsza, czy cięższa? b) nie chcemy tego wiedzieć?

Odpowiedź

a) potrzebne 3 ważenia, b) wystarczą 2 ważenia.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1) Wśród czterech jednakowych monet jedna jest fałszywa i różni się od pozostałych cięższymi. Czy dwa ważenia wystarczą, by wskazać fałszywą monetę i stwierdzić, czy jest lżejsza, czy cięższa, jeśli mamy do dyspozycji pięć monet, o których wiemy, że jest prawdziwa?

2) Kasia ma w pudełku jednakowe monety. Okazało się, że jedna z nich ma inną masę od pozostałych, ale nie wiadomo, czy jest cięższa, czy lżejsza. Kasia umie ją znaleźć za pomocą trzech ważeń. Ile ma monet?

3) Wśród 13 jednakowych z wyglądu monet jedna jest fałszywa i różni się wagą. Wskaż ją w trzech ważeniach.

4) Na stole leży: a) 9, b) 16 różnych monet. Żadne dwie nie mają takiej samej wagi. Za pomocą ilu ważeń można wyznaczyć najcięższą monetę? A dwie najcięższe?