Matematyka i życie

Pierwiastek albo śmierć

W artykule odpowiadamy na pytanie, co mają ze sobą wspólnego: atomowa struktura materii, Konstytucja Europejska i hipoteza warta milion dolarów. Okazuje się, że za wszystkim stoi… pierwiastek kwadratowy.

Ruchy Browna

W roku 1827 brytyjski biolog, Robert Brown, obserwując przez mikroskop pyłki kwiatowe w wodnej zawiesinie, zauważył ich bezustanny, chaotyczny ruch. Zjawisko to wyjaśnili niezależnie Albert Einstein w 1905 i polski fizyk, Marian Smoluchowski w 1906 roku. Zgodnie z przyjętą przez nich, uznawaną do dziś koncepcją, ruch ten (nazywany ruchem Browna) powodowany jest przez uderzenia cząsteczek płynu lub gazu, w którym się odbywa. Cząsteczki te, o wiele mniejsze od pyłku kwiatowego, poruszają się chaotycznie i z dużymi prędkościami, a że jest ich bardzo dużo, bombardują te poruszające się drobiny nierównomiernie i stąd bierze się obserwowany chaotyczny ruch.

Dla lepszego wyjaśnienia tego zjawiska Smoluchowski zbadał sytuację jednowymiarową – umieścił ruchomą cząstkę w punkcie 0 osi liczbowej i założył, że co jednostkę czasu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ przesuwa się ona o 1 w lewo lub w prawo. Ruch taki można symulować, np. rzucając monetą. Sam autor porównywał go do „gry hazardownej”, w której „wiemy dobrze, że szczęście i nieszczęście zwykle niezupełnie się równoważą i że im dłużej gra trwa, tem większa jest przeciętnie suma albo wygrana albo stracona”. Obliczmy zatem „przeciętne” położenie cząstki po czasie n. Rachunek prawdopodobieństwa mówi, że prawdopodobieństwo uzyskania w n próbach dokładnie m ruchów w prawo wynosi $\binom{n}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, czyli $\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}$. W takim przypadku cząstka po n jednostkach czasu znajduje się w punkcie $2m-n$ (dlaczego?), zatem jej średnia odległość od zera wynosi wtedy:

$$\left(2\cdot\frac{n}{2}-n\right)\binom{n}{\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(2\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)-n\right)\binom{n}{\frac{n}{2}+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2+$$
$$+\left(2\cdot\left(\frac{n}{2}+2\right)-n\right)\binom{n}{\frac{n}{2}+2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2+\ldots+(2n-n)\binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2,$$

przy założeniu dla uproszczenia, że n jest parzyste. Można udowodnić, że suma ta wynosi $\frac{n}{2^n}\cdot\frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}$.

Mnożenie składników przez 2 bierze się stąd, że oddalonym o k jednostek można być na na 2 sposoby (w prawo lub w lewo). Dlatego w pierwszym składniku go nie ma ($\frac{n}{2}$ ruchów w prawo, czyli po n ruchach wracamy do punktu 0).

Okazuje się, że wartości tego wyrażenia dla dużych n są bardzo bliskie wartości $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$. Dla $n > 25$ różnią się o mniej niż 1%, a dla dla $n > 249$ – o mniej niż 0,1% i różnica ta maleje coraz bardziej dla jeszcze większych n, czyli już dla stosunkowo niedużych wartości n podany pierwiastek jest bardzo dobrym przybliżeniem średniego wyniku. O tych i innych zaskakujących własnościach ruchów Browna napiszemy bardziej szczegółowo w jednym z następnych numerów.

Wybory

Jaki ma to związek z wyborami? Otóż głos pojedynczego wyborcy ma największy wpływ na wynik wyborów, gdy wszystkie głosy rozkładają się po równo. W przypadku dwóch możliwości wyboru (np. w drugiej turze wyborów prezydenckich) przy n oddanych głosach rozkład „po równo" ma takie samo prawdopodobieństwo jak to, że opisana wyżej błądząca cząstka po n jednostkach czasu znajdzie się znów w punkcie wyjścia (dlaczego?). Na mocy poprzednich rozważań jest to $\binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, czyli około $\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$ (dlaczego?). Zatem jeśli przez **siłę głosu obywatela** rozumieć prawdopodobieństwo, że jego głos będzie miał znaczący wpływ na wynik wyborów, to jest to wielkość odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby głosujących.

Pojęcie siły głosu badał w XX w. brytyjski psychiatra, genetyk i matematyk, Lionel Penrose, i to jego nazwiskiem teoretycy głosowania określają uzyskane przez nas właśnie prawo pierwiastkowe (nie jest to więc wcale polski wynalazek). Penrose badał też pojęcie **siły głosu partii politycznej**. Aby wyznaczyć procentowo tę wielkość, trzeba zliczyć wszystkie wygrywające koalicje, których członkiem jest dana partia, a które bez jej udziału przestają być wygrywające, i podzielić otrzymaną liczbę przez sumę takich wyników otrzymanych kolejno dla wszystkich partii. Proponujemy wykonanie takich obliczeń dla polskiego sejmu.

Siła głosu mieszkańca Unii Europejskiej w Radzie Unii jest iloczynem siły głosu obywatela we własnym państwie i siły głosu tego państwa w Unii, zatem każdy Europejczyk będzie miał tę samą siłę głosu, jeśli siła głosu każdego państwa członkowskiego będzie proporcjonalna do pierwiastka z liczby jego obywateli. Nie od razu wiadomo jednak, jak to uzyskać, bo procentowy udział głosów przydzielonych każdemu państwu w UE (czyli tak zwana **waga głosu** danego państwa) nie określa w prosty sposób siły głosu tego państwa (trzeba sposobem opisanym wyżej zbadać wszystkie koalicje wygrywające w przyjętym systemie głosowania). W 2004 r. naukowcy z Uniwersytetu Jagiellońskiego, Wojciech Słomczyński i Karol Życzkowski, wykazali, że daje się to z dobrym przybliżeniem uzyskać przy przypisaniu każdemu państwu wagi równej sile jego głosu (czyli proporcjonalnej do pierwiastka z liczby ludności) w Radzie UE i ustaleniu progu przegłosowania uchwały na 61,6%.

✻ „Obowiązujący w tej chwili *system nicejski* ma szereg wad. Daje przesadnie dużą siłę małym krajom. Trzeba to poprawić, by lepiej odzwierciedlić rzeczywistość polityczną. […] Zastąpienie liczby ludności pierwiastkiem z tej liczby to inteligentny sposób, by brać pod uwagę nierówności demograficzne i redukować ich konsekwencje, jednocześnie całkiem ich nie niwelując. To zgodne z unijną tradycją. Ale zgłoszono go o wiele za późno. […] *System podwójnej większości* proponowany obecnie w projekcie konstytucji też nie jest zły, także dla Polski. Faworyzuje ludne kraje, a to daje Polsce dobrą pozycję w stosunku do małych państw. Polska niesłusznie widzi w nim diabła. […] Na ten system zgodziło się 25 z 27 krajów. Sprawa systemu głosowania nie zasługuje, by poświęcać dla niej całe porozumienie." – mówi francuski liberalny eurodeputowany.

✻ Zablokowanie przez Polskę rozmów o eurokonstytucji byłoby katastrofą. Aby jej zapobiec, rozważane jest rozwiązanie kompromisowe *Nicea za pierwiastek*, polegające na przedłużeniu uzgodnionego w 2004 r. *systemu nicejskiego* na pełnych 10 lat, a potem automatyczne przejście do *systemu podwójnej większości*. Obecny system daje Polsce większą siłę głosu niż *system pierwiastkowy*.

W 2007 r. ustalili oni także ogólną wysokość optymalnego progu przy wagach równych siłom głosów poszczególnych państw. Wynosi on

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{n_1+n_2+\ldots+n_k}}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}+\ldots+\sqrt{n_k}}\right).$$

Czytelnik z łatwością domyśli się, co oznaczają liczby $n_1, n_2, \ldots, n_k$, i może sprawdzić wynik dla aktualnego składu UE. Wzór ten daje oczywiście możliwość łatwego dostosowania optymalnego systemu Penrose'a przy dalszym rozszerzaniu Unii.

Hipoteza za milion

W 1831 r. niemiecki uczony, August Ferdynand Möbius wprowadził funkcję nazywaną dziś jego nazwiskiem, określoną na liczbach naturalnych:

$$\mu(n)=\begin{cases}0, & \text{gdy w rozkładzie } n \text{ na czynniki pierwsze któryś z nich się powtarza,}\\ 1, & \text{gdy czynniki pierwsze w rozkładzie } n \text{ są różne i jest ich parzysta liczba,}\\ -1 & \text{w przeciwnym razie.}\end{cases}$$

Jaka jest zależność między $\mu(kl)$ oraz $\mu(k)$ i $\mu(l)$ dla k i $l \in \mathbb{N}$ i względnie pierwszych? Czy działa ona także w innych przypadkach?

Wkrótce potem inny niemiecki matematyk (urodzony w Środzie Wielkopolskiej i pracujący przez blisko 20 lat na Uniwersytecie Jagiellońskim), Franz Mertens, zdefiniował tzw. funkcję Mertensa: $M(n)=\mu(1)+\mu(2)+\ldots+\mu(n)$. Wysunął przypuszczenie, że wartości funkcji $M(n)$ odbiegają od zera nie dalej niż na $\sqrt{n}$ (sam Mertens jeszcze pod koniec XIX w. sprawdził tę własność dla $n<10\,000$). Dziś wiadomo, że dla wszystkich $n<10^{13}$ zachodzi $|M(n)|<\sqrt{n}$.

Hipoteza ta nie dawała się zweryfikować aż do 1985 roku, mimo że za jej dowód można było otrzymać milion dolarów! Została wyceniona tak wysoko, ponieważ jej prawdziwość pociąga prawdziwość hipotezy Riemanna – jednej z najważniejszych hipotez matematyki, nierozstrzygniętej od 1859 r. (za którą właśnie taka nagroda została wyznaczona, patrz MMM 3/2004). W 1985 r. hipotezę Mertensa rozstrzygnięto, niestety jej „pogromcy" nie dostali z obiecanego miliona ani centa, a to dlatego, że rozstrzygnęli ją negatywnie, a taki wynik nic już o hipotezie Riemanna nie mówi. Wykazali, że w przedziale $(10^{14},\ 25^{10^{64}})$ istnieje n, dla którego $|M(n)|\geq\sqrt{n}$. Co ciekawe, do dziś nie wiadomo, dla jakiego n dokładnie hipoteza Mertensa się nie sprawdza, wiadomo tylko, że taka wartość istnieje...

Pierwiastek

Większość ludzi myśli pewnie, że pierwiastek kwadratowy jest tylko jakimś chwilowym wymysłem polskich polityków i nic nie wartą matematyką. A jednak widać, że to właśnie ten niesławny pierwiastek tłumaczy zjawiska zachodzące w przyrodzie, jest najsprawiedliwszym sposobem podziału głosów, a czasem może uczynić każdego milionerem. Czy warto umierać za pierwiastek? Nie wiem, ale zaprzyjaźnić się z nim warto na pewno.

Andrzej Grzesik, student matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

* „Przeciętny obywatel UE w ogóle nie wie, o co chodzi w sporze o pierwiastek kwadratowy" – mówią premierzy Słowacji i Węgier. „To przypomina lata, kiedy jak chciano przywrócić tradycyjny kształt polskiego godła, to słyszeliśmy, że wszyscy ludzie tak naprawdę są czymś innym zainteresowani." – odpowiada premier Kaczyński.

* „Nie możemy przyjąć rozwiązania *Nicea za pierwiastek*. Polska zbyt wiele zainwestowała w promowanie nowego systemu, by zadowolić się odłożeniem problemu na później." – mówi członek PiS.

* Polska trwa przy żądaniu zmiany systemu głosowania. Warszawa proponuje, by system zwany *podwójną większością* (gdzie liczba głosów dla kraju jest proporcjonalna do liczby jego ludności, a decyzje zapadają, gdy „za" wypowie się większość krajów zamieszkanych przez większość obywateli UE) został zastąpiony *systemem pierwiastkowym*, który zmniejsza różnice w sile głosów między średnimi a dużymi państwami.

* „Nie podoba nam się retoryka „umierania za pierwiastek". My nie zamierzamy za pierwiastek umierać, rozwiązaniem problemu nie może być martwa Polska." – mówi czeski wicepremier.

Cytaty zaczerpnięto z „Gazety Wyborczej" z 19.06.07.