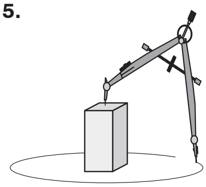
Samouczek zadaniowy

Klub olimpijczyka

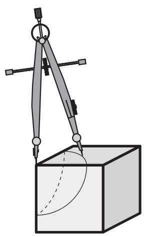
Odpowiedzi

5-10-15-20 „Cyrklem i sprytem”

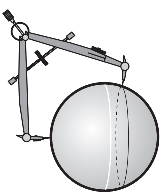
5.



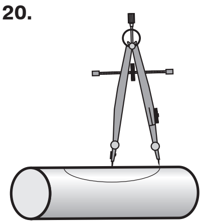
10.



15.



20.



Rubryka, którą właśnie otwieramy, ma pomóc wszystkim, którzy planują samodzielne przygotowanie się do Olimpiady Matematycznej i innych konkursów. Będziemy w niej prezentowali zadania z rozmaitych zawodów krajowych i międzynarodowych podzielone na wąskie działy tematyczne. Mamy nadzieję, że kącik ten znajdzie wielu stałych czytelników. Zapraszamy do wspólnego treningu w rozwiązywaniu tych nie zawsze łatwych, ale niezmiennie ciekawych zadań. Autor wyboru zadań i szkiców rozwiązań sam z powodzeniem startował kiedyś w Olimpiadzie Matematycznej, odnosząc sukcesy na szczeblu międzynarodowym. Dziś jest studentem matematyki na Uniwersytecie Wrocławskim.

Zasada szufladkowa

Łyk teorii

Zasada Dirichleta (zwana też zasadą szufladkową, a czasem – w wyniku błędnego tłumaczenia z angielskiego – zasadą gniazd gołębich [ang. *pigeon-holes* oznacza regał z przegródkami używany w recepcji na klucze i korespondencję]) jest regułą intuicyjnie oczywistą. Można sformułować ją następująco: jeżeli $n+1$ królików rozmieścimy w n klatkach, to w pewnej klatce znajdą się przynajmniej 2 króliki. Zasada nie wskazuje, jak znaleźć klatkę z dwoma lub więcej królikami (bo ogólnie nie da się tego stwierdzić), jest więc przykładem twierdzenia egzystencjalnego – dowodzi istnienia (egzystencji) pewnego obiektu.

Powyższą regułę można łatwo uogólnić: jeżeli $n(k-1)+1$ królików rozmieścimy w n klatkach, to w pewnej klatce znajdzie się przynajmniej k królików. Można też korzystać z tej zasady w przypadku nieskończonym: jeżeli nieskończenie wiele królików rozmieścimy w skończenie wielu klatkach, to w pewnej klatce znajdzie się nieskończenie wiele królików.

Zrozumienie zasady Dirichleta nie sprawia trudności. Kłopot z zadaniami, w których jest ona przydatna, polega na tym, że często nie widać od razu, jakie obiekty grają rolę klatek, a jakie – królików, a główny pomysł na rozwiązanie zadania polega właśnie na wskazaniu tej odpowiedniości. W zadaniach z teorii liczb często rolę klatek pełnią możliwe reszty z dzielenia (w szczególności parzystość liczb), mogą to być także pary lub trójki reszt, największe dzielniki nieparzyste, najwyższe wykładniki potęg dwójki dzielących daną liczbę albo jeszcze inne własności.

Zadania

1. Danych jest 7 liczb całkowitych. Wykazać, że można wśród nich znaleźć takie dwie, że różnica ich kwadratów jest podzielna przez 10.

2. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych. Udowodnić, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów także jest punktem kratowym.

3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że istnieje taka liczba naturalna m, że zapis liczby mn składa się tylko z zer i jedynek.

4. Udowodnić, że z dowolnego 10-elementowego zbioru złożonego z liczb dwucyfrowych można wybrać dwa różne niepuste podzbiory, których sumy elementów będą równe.

5. Wykazać, że w ciągu Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geq 2$) można znaleźć liczbę podzielną przez 2006.

6. Spośród liczb $1, 2, \ldots, 2n$ wybrano $n+1$ sztuk. Dowieść, że wśród wybranych liczb można znaleźć dwie, z których jedna dzieli się przez drugą.

7. Danych jest 2006 liczb całkowitych. Wykazać, że zawsze można wśród nich znaleźć takie trzy różne liczby a, b, c, że $a(b-c)$ jest podzielne przez 2006.

8. Danych jest 17 różnych liczb całkowitych. Udowodnić, że można spośród nich wybrać pięć liczb, których suma jest podzielna przez 5.

9. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną k o tej własności, że wśród dowolnych k różnych liczb całkowitych można wskazać dwie, których różnica sześcianów jest podzielna przez 9.

10. W ciągu 0, 0, 1, 2, 3, 6, 12, 23, 44, 85, 164, … każdy wyraz począwszy od piątego jest sumą czterech poprzednich. Wykazać, że pewne dwie kolejne liczby w tym ciągu są podzielne przez 14.

Podpowiedzi

1. Reszta z dzielenia przez 10 to cyfra jedności. Kwadraty przy dzieleniu przez 10 mogą dawać tylko 6 różnych reszt: 0, 1, 4, 5, 6, 9 (dlaczego?). Liczby rozkładamy do szuflad według tych reszt. Różnica kwadratów liczb z tej samej szuflady spełnia warunki zadania.

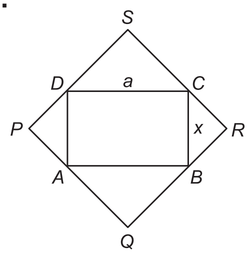
2. Punkty rozkładamy do szuflad w zależności od parzystości obu ich współrzędnych, mamy zatem 4 możliwości: (parz., parz.), (parz., nieparz.), (nieparz., parz.), (nieparz., nieparz). Jeśli dwa punkty są w tej samej szufladzie, to środek łączącego je odcinka jest punktem kratowym (dlaczego?).

Odpowiedzi

„Złota liczba”

1. Przekątna ma długość 2, zatem promień sfery wynosi 1, a jej powierzchnia 4π. Powierzchnia cegły wynosi 4φ. Szukany stosunek to $\frac{\varphi}{\pi}$.

2.



Prostokąt $ABCD$ jest złoty, więc $\frac{a}{x} = \varphi$. Trójkąty DCS i BCR są podobne (dlaczego?), więc $\frac{a}{x} = \frac{y}{z}$.

3. Kolejny złoty prostokąt jest podobny do poprzedniego w skali

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

W takiej skali są też podobne odcinane kwadraty i łuki wpisanych w nie okręgów. Pierwszy łuk ma długość $\frac{\pi}{2}$ i wraz z następnymi tworzy ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{\varphi}$. Długość spirali to suma tego nieskończonego ciągu, która wynosi $\frac{\pi}{2\varphi}$.

4. Jest to ułamek postaci

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ldots}}},$$

co prowadzi do równania $x = 2 + \frac{1}{x}$ lub równoważnie (bo $x \neq 0$) $x^2 - 2x - 1 = 0$, którego dodatnim pierwiastkiem jest $\sqrt{2} + 1$. Musi być $a_i \neq 0$.

Donosy

Chuck Norris i matematyka

- Wystarczy, że Chuck Norris spojrzy na równanie i iks sam się ujawnia.
- Chuck Norris policzył do nieskończoności. Dwa razy.
- Chuck Norris ściągnął internet na dyskietkę.
- Chuck Norris potrafi obejrzeć 60-sekundowy film w 20 sekund.
- Chuck Norris potrafi skrzyżować dwie proste równoległe, a nawet skośne (kopiąc je z półobrotu).
- Chuck Norris może obalić każdą teorię matematyczną (kopnięciem z półobrotu).
- Chuck Norris dodał dwie ujemne liczby i otrzymał dodatnią.
- CNN podało, że Chuck Norris doliczył do nieskończoności po raz trzeci.
- Chuck Norris potrafi z dowolnej pozycji początkowej jednym ruchem (zgadnij jakim) ułożyć kostkę Rubika. (Tak, kopnięciem z półobrotu).
- Chuck Norris wygrywa każdą partię szachów jednym posunięciem (pion Chucka kopie króla przeciwnika z półobrotu).
- Chuck Norris potrafi zapisywać liczby niewymierne w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych.
- Chuck Norris potrafi dzielić przez zero.
- Chuck Norris wyliczył dokładnie liczbę π. Na liczydle!
- Chuck Norris wykonał kwadraturę koła. Sami wiecie jak.
- Tylko Chuck Norris potrafi kopnąć w kant kuli. Oczywiście z półobrotu.
- Chuck Norris udowodnił hipotezę Riemanna.
- Tylko Chuck Norris może jednocześnie określić położenie i pęd cząstki elementarnej.
- Światło nie może poruszać się jeszcze szybciej, bo Chuck Norris nie lubi, kiedy ktoś biega szybciej od niego.
- CNN donosi, że Chuck Norris policzył do nieskończoności nieskończenie wiele razy.
- Najnowsze podręczniki podają, że romb to kwadrat kopnięty z półobrotu przez Chucka Norrisa.
- Półobrót Chucka Norrisa ma 720°.

3. Rozważamy nieskończony ciąg liczb: 1, 11, 111, 1111, 11111... Wśród nich istnieją dwie, które dają jednakowe reszty z dzielenia przez n (dlaczego?). Ich różnica jest szukaną liczbą.

4. Różnych niepustych podzbiorów jest $2^{10} - 1 = 1023$ (dlaczego?), natomiast różnych możliwych sum jest co najwyżej tyle, ile liczb naturalnych w przedziale $[10, 90+91 \ldots +99] = [10; 945]$, czyli najwyżej 936.

5. Niech r_n będzie resztą z dzielenia liczby F_n przez 2006. Różnych par $(r_n; r_{n+1})$ jest skończenie wiele (dlaczego?), więc dla pewnych k i m ($k < m$) musi być $(r_k, r_{k+1}) = (r_m, r_{m+1})$. Dwie kolejne reszty z dzielenia wyrazów ciągu Fibonacciego w ten sam sposób wyznaczają wszystkie poprzednie reszty i dlatego musi zachodzić $(r_0, r_1) = (r_{m-k}, r_{m-k+1})$. Jeśli przedłużymy rekurencję do $F_0 = 0$, otrzymamy $r_0 = 0$. Mamy zatem $r_{m-k} = 0$, więc $2006 | F_{m-k}$.

6. Każdej spośród wybranych $n+1$ liczb przyporządkowujemy jej największy nieparzysty dzielnik. Należy on do n-elementowego zbioru $\{1; 3; 5; \ldots; 2n-1\}$, zatem pewne dwie spośród wybranych liczb mają ten sam największy nieparzysty dzielnik. Jedna z nich musi być iloczynem drugiej przez potęgę dwójki (dlaczego?).

7. Jest 2006 różnych reszt z dzielenia przez 2006, zatem na pewno jakaś liczba z danego zbioru jest podzielna przez 2006 lub pewne dwie dają taką samą resztę z dzielenia przez 2006.

8. Musi zachodzić przynajmniej jedna z możliwości: a) można wybrać pięć liczb dających takie same reszty z dzielenia przez 5, b) można wybrać pięć liczb dających różne reszty z dzielenia przez 5 (dlaczego?). W obu przypadkach tworzymy sumę tych właśnie liczb.

9. Sześciany mogą dawać trzy różne reszty przy dzieleniu przez 9: 0, 1, 8 (dlaczego?). Liczby 0, 1, 2 nie mają żądanej własności, a z dowolnych czterech liczb da się wybrać dwie, których sześciany dają jednakową resztę z dzielenia przez 9. Zatem $k = 4$.

10. Zastosuj metodę z zadania 5.

Kamil Duszenko, Wrocław