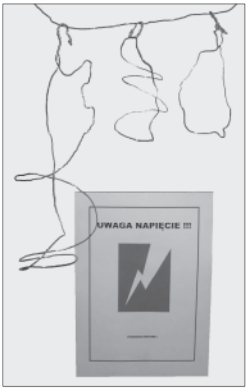
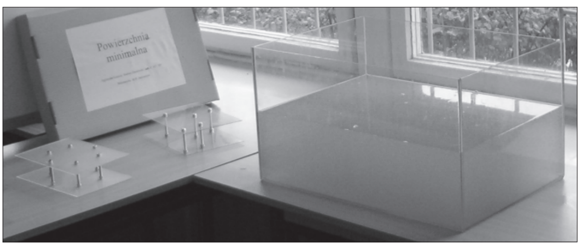
Etiudy geometryczne
Obrazki z wystawy (2)



W poprzednim numerze rozpoczęliśmy prezentację migawek z popularnonaukowej wystawy „Matematyka dla artystów. Matematyka dla każdego”, która towarzyszyła w ubiegłym roku obradom XV Zjazdu Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Białymstoku. Tym razem prezentujemy dział poświęcony powierzchniom minimalnym.

Zbliżamy się do dużego pojemnika napełnionego roztworem wody i płynu do mycia naczyń. Wokół stoją tajemnicze „podwójne” płytki połączone śrubami i rozwieszone są dziwne druciane ramki. „Uwaga, napięcie!” – ostrzega napis. Nie ma obawy, to tylko napięcie powierzchniowe, które umożliwi nam przeprowadzenie interesujących eksperymentów.

Aby zrozumieć zachowanie się baniek mydlanych, potrzebna jest znajomość ogólnych właściwości cieczy. Każda jej cząsteczka podlega siłom przyciągania otaczających ją cząsteczek (w obrębie około 100 nm). Dla cząsteczek wewnątrz cieczy (ponieważ inne cząsteczki otaczają ją ze wszystkich stron tak samo gęsto) wypadkowa sił przyciągania jest równa zero, natomiast dla cząsteczek na powierzchni, wypadkowa ta jest skierowana do środka cieczy. Dlatego tworzy się wspomniane już **napięcie powierzchniowe**. Energia potencjalna cieczy jest równa pracy koniecznej do oderwania jej molekuł. Jednak przyroda jest leniwa. Ciecz, jak każdy inny układ, dąży do uzyskania stanu **minimalnej energii** (wtedy układ pozostaje w trwałej równowadze). Najmniejszą energię błony zapewnia taki kształt, przy którym jej powierzchnia jest minimalna. Bańka zamyka pewną ilość powietrza, więc błona przybiera kształt, który przy danej objętości ma najmniejszą powierzchnię. Jedyną bryłą o tej własności jest kula.



Bańki mydlane

W przygotowanej mieszaninie zanurzamy prostą pętlę z drutu. Po wyjęciu napina się na niej cienka warstwa mydlanej błony. Gdy delikatnie na nią dmuchamy, błona rozciąga się najbardziej, jak może. W końcu odrywa się i przybiera kształt idealnie kulistej bańki. Dlaczego wszystkie bańki mydlane wyglądają tak samo?

Powierzchnie minimalne

Bierzemy inną drucianą ramkę, w kształcie przestrzennej krzywej zamkniętej, i zanurzamy w roztworze. Po wyjęciu pozostaje na niej napięta błona, która zachowuje się bardzo inteligentnie: bez żadnych obliczeń zawsze osiąga minimum całkowitej powierzchni przy danym konturze. To napięcie powierzchniowe stara się zmniejszyć powierzchnię błony, zgodnie z zasadą minimalizacji energii. Powierzchnie o takiej własności nazywamy powierzchniami minimalnymi. Przez użycie różnych ramek możemy otrzymać błony o zadziwiających, urzekających kształtach.

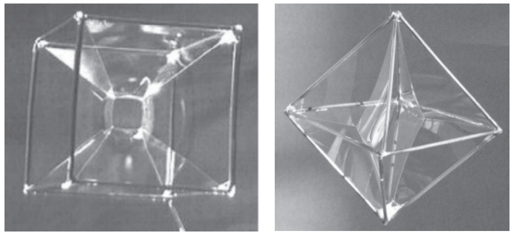
Rozwój technologii wytwarzania powłokowych materiałów tekstylnych pozwala na konstruowanie przekryć o dowolnych kształtach. Piękno i opymalność powierzchni minimalnych jest źródłem inspiracji dla architektów, a doświadczenia z błonami mydlanymi stanowią wstępny etap projektowania przekryć membranowych.

Sieci minimalne

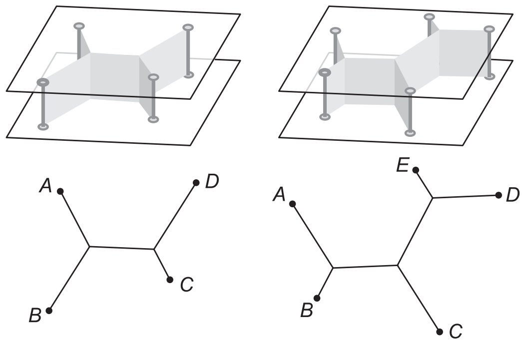
Zanurzamy jeszcze w roztworze równoległe, przezroczyste płytki, połączone w kilku miejscach prostopadłymi do nich drutami. Po wyjęciu błona mydlana utworzy między płytkami układ pionowych płaszczyzn, których rzut powstały na płytce daje minimalną sieć rozpiętą między punktami na płaszczyźnie (tzw. minimalne drzewo Steinera). Zagadnienie to pojawia się np. przy projektowaniu sieciowych połączeń telekomunikacyjnych między zadanymi punktami, na które chcemy zużyć jak najmniej przewodów. Do tej pory nie znaleziono efektywnego sposobu matematycznego wyznaczania takich sieci dla dowolnego układu *n* punktów na płaszczyźnie, jednak przyroda potrafi samoistnie znaleźć optymalne rozwiązanie.

Eksperymenty z błonami mydlanymi przeradzają się w spektakl, którego bohaterami są niepowtarzalne, pełne delikatności i gracji powierzchnie minimalne, a jego reżyserem staje się sam eksperymentator. Nic dziwnego, że wciąga to dzieci i dorosłych, wszak każdy ma w sobie coś z artysty. A ten spektakl wyjątkowo pobudza do myślenia. To naprawdę matematyka dla każdego.

Ryszard Janiszewski, Białystok



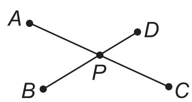
Powierzchnie minimalne rozpięte na szkielecie sześcianu i ośmiościanu

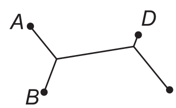


Jakub Steiner – słynny geometra, wykładowca Uniwersytetu w Berlinie, na początku XIX w. rozpatrywał proste zagadnienie, jak połączyć trzy wioski siecią dróg o najmniejszej łącznej długości. W tym celu wystarczy znaleźć punkt płaszczyzny, którego suma odległości od danych punktów *A*, *B*, *C* jest najmniejsza (pisaliśmy o tym w MMM 2/2004). Pytanie to można uogólnić i szukać punktu o najmniejszej sumie odległości od *n* danych punktów (patrz *Jak fizyka pomaga matematyce?*, s. 17). Jednak tak postawione zagadnienie nie jest zbyt ciekawe. Dużo ważniejsze wydaje się uogólnienie oryginalnego problemu Steinera, w którym rezygnujemy z poszukiwania jednego punktu i pytamy, jak połączyć *n* punktów siecią odcinków o najmniejszej łącznej długości. Odpowiedzi na te pytania pokrywają się tylko dla trzech punktów. Dla czterech punktów ilustruje je rysunek.

a) Najmniejsza suma odległości od czterech punktów.

b) Najkrótsza sieć łącząca cztery punkty.





Zadanie: zbadać oba zagadnienia dla czterech punktów, które nie leżą na płaszczyźnie.